

Achim Cuypers

# Geometrie

*in Kinderhaus und  
Montessori-Grundschule*

Montessori PRAXIS

**HERDER**

Geometrie in Kinderhaus  
und Montessori-Grundschule

|M|o|n|t|e|s|s|o|r|i| ■ |P|r|a|x|i|s|

Herausgegeben von  
Michael Klein-Landeck und Tanja Pütz

---

**Geometrie**  
**in Kinderhaus und Montessori-Grundschule**

Achim Cuypers

# Geometrie in Kinderhaus und Montessori- Grundschule



© Verlag Herder GmbH, Freiburg im Breisgau 2018  
Alle Rechte vorbehalten  
[www.herder.de](http://www.herder.de)

Umschlagkonzeption und -gestaltung: Berres & Stenzel, Freiburg  
Umschlagfoto: © Ludwig Sauels

Layout: Berres & Stenzel, Freiburg  
Satz und Gestaltung: post scriptum, Vogtsburg-Burkheim  
Herstellung: Graspö CZ, Zlín

Printed in the Czech Republic

ISBN Print 978-3-451-37764-8  
ISBN E-Book (PDF) 978-3-451-81420-4

# Inhalt

Einleitende Worte 8

## 1. Die Bedeutung der Geometrie für den Menschen 10

- 1.1 Die Ursprünge der Geometrie 11
- 1.2 Woher kommt der Name Geometrie? 11
- 1.3 Pythagoras von Samos (570–510 v. Chr.) 14
- 1.4 Geometrie und Landschaft, Architektur und Kunst 14
- 1.5 Montessoris Geometriematerial 16

## 2. Maria Montessoris Buch *Psychogeometrie* 20

## 3. Geometrie und Kosmische Erziehung 24

- 3.1 Kosmos und Geometrie 25
- 3.2 Die Faszination des Unendlichen 25
- 3.3 Das Geordnete, das Unendliche, das Schöne des Kosmos 26
- 3.4 Montessoris Geometriematerial als kosmisches Material 29

## 4. Geometriematerial als Entwicklungsmaterial 32

- 4.1 Entwicklungsstufen nach Maria Montessori 33
- 4.2 Montessoris Geometriematerial für Kinder von 3–12 Jahren 34
- 4.3 Leitfaden der Entwicklungsmöglichkeiten durch die Arbeit mit dem Geometriematerial 34
- 4.4 Beispiele für die Tätigkeiten mit dem Geometriematerial 37
- 4.5 Einsatzmöglichkeiten in den verschiedenen Entwicklungsstufen am Beispiel der Zwölf Blauen Dreiecke 40

## 5. Geometriematerial als Sinnesmaterial: Geometrie im Kinderhaus 44

- 5.1 Sinneswahrnehmungen 45
- 5.2 Materialien zur Unterscheidung der Dimensionen 45
- 5.3 Material zur Unterscheidung von Formen (Geometriematerial) 47



- 5.4 Geometriematerial als Sinnesmaterial 48
- 5.5 Die Geometrische Kommode 48
- 5.6 Konstruktive Dreiecke 52
- 5.7 Zwölf Blaue Dreiecke 58
- 5.8 Eingeschriebene und konzentrische Figuren 58
- 5.9 Satz Kreise, Dreiecke und Quadrate 61
- 5.10 Geheimnisvoller Beutel 61
- 5.11 Geometrische Körper (für Kinderhaus und Grundschule) 63

## **6. Geometriematerial für Grundschulkinder 68**

- 6.1 Grundsätzliches zum Geometriematerial in der Grundschule 69
- 6.2 Hinweis zum Einsatz der Geometrischen Kommode in der Grundschule 71
- 6.3 Hinweis zur Dokumentation erarbeiteter Themen 72
- 6.4 Der Geometrische Stäbchenkasten 73
- 6.5 Das Dreieckspiel 90
- 6.6 Die Geteilten Dreiecke 99
- 6.7 Das ungleichseitige spitzwinklige Dreieck 106
- 6.8 Die Geteilten Quadrate 109
- 6.9 Das Gelbe Flächenmaterial 115
- 6.10 Das metallene Material zum Flächenvergleich 124
- 6.11 Die Rahmen zum Satz des Pythagoras 126
- 6.12 Das Geometrische Nagelbrett 132
- 6.13 Der Umfang von Flächen 134
- 6.14 Geometrische Grundbegriffe und Lehrsätze 137
- 6.15 Geometrisches Zeichnen 139
- 6.16 Geometrische Körper und Volumen 146

## **7. Die Vorbereitete Umgebung einer Montessori-Klasse in der Grundschule 156**

- 7.1 Die Vorbereitete Umgebung 157
- 7.2 Kriterien für das Material 159
- 7.3 Die vorbereitete Lehrerin 161
- 7.4 Das vorbereitete Kind 162

## Anhang 163

Arbeitsblatt *Blaue Dreiecke* 164

Arbeitsblatt *Geometrische Körper* 165

Arbeitsblatt *Das Ägyptische Seil* 166

Arbeitsblatt *Verschiedene Dreiecke (Dreieckspiel)* 167

Arbeitsblatt *ungleichseitiges spitzwinkliges Dreieck* 168

Arbeitsblatt *Nagelbrett* 169

## Literatur 172

## Abbildungsverzeichnis 173

Über den Autor 174

# Einleitende Worte

Dieses *Praxisbuch Geometrie* beschreibt, wie Kinder einen sensorischen (sinnenhaften) und intellektuellen Zugang zur Geometrie finden können, und zwar durch die Arbeit mit dem Montessori-Material.

Kapitel 1 befasst sich zunächst mit der Bedeutung der Geometrie für den Menschen. Der Mensch macht sich die Geometrie seit Jahrtausenden zunutze. Und auch heute wachsen die Kinder in einer durch geometrische Formen geprägten Umgebung auf. Montessoris Geometriematerial bietet Möglichkeiten, sich die Formen dieser vom Menschen geschaffenen Welt zu erschließen. So bewährt sich das Arbeitsmaterial als *Schlüssel zur Welt* für das Kind.

Die wichtigste Grundlage des vorliegenden Praxisbuches ist Maria Montessoris Werk *Psychogeometrie*, das zuerst 1934 in spanischer Sprache erschienen ist und in Kapitel 2 kurz vorgestellt wird. Als Naturwissenschaftlerin mit großer Begeisterung für Mathematik interessierte sich Montessori selbstverständlich für die Geometrie als eine der ältesten Wissenschaften. In der pädagogischen Arbeit geht sie jedoch nicht primär von fachwissenschaftlichen Aspekten, sondern von den entwicklungsbedingten Möglichkeiten der Kinder aus. Die Psyche des Kindes und die jeweilige Entwicklungsstufe, in der sich das Kind befindet, sind für Montessori die wichtigsten Orientierungspunkte. Das Kind lernt nicht nur mit dem Verstand, sondern es entwickelt einen *Sinn für Geometrie*.

»Zeigt dem Kind das Ganze«, fordert Maria Montessori. Feststehende *Ordnungsformen* in der Natur und die Faszination der *Unendlichkeit* stellen die Verbindung zwischen Montessoris »Kosmischer Erziehung« und der Geometrie her. In Kapitel 3 wird erläutert, warum ihr Geometriematerial gleichzeitig auch Material zur Kosmischen Erziehung ist.

Montessoris Geometriematerial ist aber natürlich vor allem auch Entwicklungsmaterial. Kapitel 4 skizziert daher den typischen Verlauf der kindlichen Entwicklung (u. a. in einer anschaulichen grafischen Darstellung in Form eines Leitfadens). Die Kombination von sinnhaften Übungen wie *wahrnehmen*, *erfühlen* und *erfassen*, motorischen Tätigkeiten wie *konstruieren* und *messen* und intellektuellen Prozessen wie *vergleichen*, *ordnen* und *strukturieren* fördert die Entwicklung des kindlichen Geistes und Verstandes.

Der Schwerpunkt dieses Buches liegt schließlich in der Beschreibung der Arbeitsmaterialien und Übungsformen. Erklärt werden Montessoris Originalmaterialien (beschrieben in ihrem Buch *Psychogeometrie*) und die nach Montessoris Tod entstandenen Materialien, die von der *Association Montessori Internationale (AMI)* anerkannt sind. Trotz der rasanten Veränderungen in unserer Umwelt hat sich der »Aufforderungscharakter« des Materials nicht verändert, die Arbeitsmöglichkeiten werden auch in Zukunft Kinder ansprechen und herausfordern. Möglichkeiten für den Einsatz des Materials im Kinderhaus (Geometriematerial ist auch Sinnesmaterial) und bei der Arbeit mit Grundschulkindern werden in den Kapiteln 5 und 6 konkret und anschaulich vorgestellt, sodass sich Arbeitsmöglichkeiten für Sekundarstufenschüler erschließen lassen. Gewissermaßen die Basis dieser Beschreibungen bilden meine Erfahrungen, die ich in 35 Jahren als

Montessori-Lehrer mit Kindern machen durfte. Alle vorgestellten Übungen habe ich oft mit Kindern durchgeführt. Immer wieder habe ich erlebt, wie Kinder gerade über das Geometriematerial ihren Zugang zur Freiarbeit gefunden haben.

Kapitel 7 befasst sich schließlich (gewissermaßen auch als eine Art Gesamtschau) mit der Bedeutung der Vorbereiteten Umgebung einer Montessori-Klasse für erfolgreiches Lernen der Kinder – mit einem Blick auch auf die notwendige Vorbereitung der Pädagoginnen und auch der Kinder selbst.

Dieses Praxisbuch will sowohl Montessori-Pädagoginnen bei ihrer täglichen Arbeit helfen als auch denen, die sich auf dem Weg zur Montessori-Pädagogik befinden, Orientierung, Anregung und Motivation geben. Es ersetzt aber in keiner Weise die Ausbildung zur Montessori-Pädagogin oder weitere Fortbildungsmaßnahmen. Und es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, im Gegenteil. Erst durch persönliche Erfahrungen in der Arbeit mit Kindern ist zu erfassen, was Maria Montessori uns hinterlassen hat. Dementsprechend werden nicht durchgängig Einzellektionen beschrieben, die Übungen werden vielmehr häufig nur angedeutet. Insofern setzt das Buch gewissermaßen auch auf die Mitarbeit der Leserinnen und Leser, die hoffentlich (so wie die Kinder) die Lust am Tun verspüren und mindestens die eine oder andere Übung persönlich ausprobieren werden, zunächst für sich selbst und dann in der Arbeit mit Kindern.

Am Ende dieses Vorworts kann ich natürlich nicht alle erwähnen, denen ich zu danken habe. Ich möchte aber jedenfalls meine holländischen Kollegen Jan van de Kerkhoff und Nico van Ewijk sowie meine deutschen Lehrmeister Norbert Ehlen, Alfons Schaffrath, Hans Wilms, Siegfried Fleck, Siegfried Werner und Hildegard Amelunxen nennen, von denen ich viel gelernt und denen ich viel zu verdanken habe.

Mein Dank geht weiterhin an Ulrike Burgmer und an Dr. Michael Klein-Landeck für Korrekturarbeiten und an Ute Matenaers für die Erstellung der Grafiken, die meine Beschreibungen ergänzen und anschaulich machen.

Vor allem aber danke ich den Kindern der Bischöflichen Maria-Montessori-Grundschule in Krefeld, die mich über Jahrzehnte lang begleitet und mir gezeigt haben, was Maria Montessori uns Erwachsenen sagen wollte. Sie sind meine größten Lehrmeister.

*Achim Cuypers*



1.

# Die Bedeutung der Geometrie für den Menschen

## 1.1 Die Ursprünge der Geometrie

Die Geometrie beschäftigt sich mit der Lehre von ebenen und räumlichen Gebilden und gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Der Begriff »Geometrie« stammt aus dem Griechischen und bedeutet »Erdvermessung«. Heute noch ist ein »Geometer« ein Experte im Vermessungswesen.

Bereits Gelehrte der Antike brachten der Geometrie eine hohe Wertschätzung entgegen. Der griechische Philosoph Platon (ca. 427–347 v. Chr.) hat der Mathematik an der von ihm in Athen gegründeten »Akademie« große Bedeutung beigemessen. So stand über dem Eingang des Gebäudes: »Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten.«

*Griechenland*

Im antiken Griechenland wurde die Mathematik als Wissenschaft also im Rahmen der Philosophie betrieben.

»Griechische Mathematik war Geometrie, und so benutzten die alten Philosophen geometrische Modelle, um die Natur zu beschreiben und zu verstehen« (Hildebrandt / Tromba 1996: 49).

Aber auch bei Ausgrabungen der Überreste prähistorischer (also noch früherer) Kulturen werden immer wieder regelmäßig geformte Gegenstände und Gebäude entdeckt – also geometrische Strukturen. Geometrisches Wissen, das in der Baukunst, im Handwerk, in der Landwirtschaft und in der Astronomie von Nutzen war, wurde immer weiter überliefert. Den Griechen gelang es schließlich auch, geometrische Begriffe wie Linie oder Fläche, die sie in ihrer Lebenswelt vorfanden, als abstrakte Vorstellung aufzufassen.

*frühe Kulturen*

»Die Erfindung der Geometrie als einer abstrakten mathematischen Wissenschaft [...] gehört zu den Wendepunkten im abendländischen Denken. Sie erst ermöglichte, abstrakte Modelle [...] zu entwerfen und damit Ordnung in die scheinbar so chaotische Natur zu bringen« (Hildebrandt / Tromba 1996: 52).

Im Mittelalter gehörte die Geometrie zu den sieben klassischen »freien Künsten«. So wurden die Erkenntnisse der (vor allem griechischen) Antike bis in die Neuzeit überliefert.

## 1.2 Woher kommt der Name Geometrie?

In der Montessori-Pädagogik ist es im Rahmen der »Kosmischen Erziehung«<sup>1</sup> üblich, die Kinder durch mündlich vorgetragene Erzählungen in eine Reihe von Themenbereichen einzuführen – und zwar gibt es traditionell sechs »Große Erzählungen« und darüber hinaus auch noch sog. »Kleine Erzählungen«. Eine dieser Erzählungen berichtet vom Ur-

<sup>1</sup> Dazu vgl. Kap. 3.

sprung der Geometrie im alten Ägypten. Wir geben hier die kindgerechte Fassung wieder, wie sie Joachim Dattke, Diplompädagoge und Leiter der heilpädagogischen Montessori-Ausbildung der Theodor-Hellbrügge-Stiftung in München, im Anschluss an Maria und Mario Montessori erzählt (vgl. Eckert / Waldschmidt 2007: 183–187).

### Ursprünge der Geometrie in Ägypten

*Die Geschichte, die ich euch erzählen möchte, geschah vor sehr, sehr langer Zeit in einem Land, das Ägypten hieß. Es heißt auch heute noch so und liegt im Norden Afrikas am Fluss Nil. Das Land war sehr trocken und es gab schon damals viele Wüsten. Das Leben war nur in der Nähe des Flusses möglich. Ohne diesen Fluss würde nichts wachsen. Die Wüsten würden sich noch mehr ausbreiten und damit wäre das Leben für Menschen unmöglich gewesen. Der Fluss war also für die Menschen sehr wichtig und darum nannten sie ihn auch Nil, was in ihrer Sprache »der Fluss« bedeutet.*

*Die meisten Ägypter waren Ackerbauern und lebten in dem fruchtbaren Tal des Nil. Sie zahlten den Priestern und Beamten und auch dem Pharao Abgaben in Form ihrer Erzeugnisse. Zu den Feldfrüchten, die angebaut wurden, gehörten Bohnen, Zwiebeln, Melonen und Gurken, aber auch die auf Bäumen wachsenden Datteln. Aus Emmer (einer Weizenart) wurde Brot gebacken und aus Gerste brauten die Ägypter Bier. Die Fischer holten Fische aus dem Nil.*

*Das Wasser des Nil fließt von Süden nach Norden. Seine Quellen liegen in den Bergen, die sehr weit von Ägypten entfernt sind. Jedes Jahr in der Frühlingszeit schmolz der Schnee in den Bergen und das Wasser floss dann nach Ägypten. Es war immer so viel Wasser, dass der Nil über die Ufer trat und mit diesem Wasser die Felder der Bauern mit fruchtbarem Schlamm bedeckte.*

*Ihr denkt vielleicht, dass diese große Überschwemmung jedes Jahr ein großes Problem für die damaligen Ägypter war. In Wirklichkeit aber waren die Menschen froh darüber. Durch diese regelmäßigen Überschwemmungen, die 10 Kilometer auf beiden Flussufern ins Land hineinreichten, wurde der Boden des Nil fruchtbar. Denn mit dem Wasser brachte der Fluss jedes Jahr auch Muttererde mit. Das Wasser spendete diesen fruchtbaren Boden und spülte ihn an Land. Vor vielen Jahrtausenden war das ein Weg, die Fruchtbarkeit des Bodens zu verbessern. Über ein Netz von Kanälen und Gräben nutzten die Ägypter die Überschwemmungen zur Bewässerung ihrer Felder. Die Wüstengebiete auf beiden Seiten des Flusses bildeten zusätzlich einen natürlichen Schutz gegen Feinde. Obwohl die Überschwemmungen jedes Jahr willkommen waren, gab es dennoch ein großes Problem. Jedes Jahr wurden die Grenzlinien, die die Felder teilten, weggeschwemmt. Als das Wasser versickerte und die Felder bereit waren, wieder neu bepflanzt zu werden, mussten die Bauern sich einigen: »Dieses ist mein Feld, dieses Feld gehört dir.« Dadurch gab es immer wieder Streit. Deshalb gab es eine Gruppe von Menschen, die dieses Problem lösen mussten. Sie wurden »Harpedonapten« genannt. Das*

ist ein griechisches Wort und bedeutet »Seilspanner«. Sie benutzten ein Seil oder einen Strick mit Knoten in bestimmten Abständen. Sklaven halfen ihnen, das Seil zu einer Dreiecksform auszubreiten, sodass ein rechter Winkel entstand.

Die Schenkel des rechten Winkels im entstandenen Dreieck konnte man je nach geplanter Größe des zu vermessenden Feldes beliebig verlängern.

An den entstandenen Eckpunkten der verlängerten Schenkel verfuhr die Seilspanner mithilfe des Knotenseils auf die gleiche Weise, sodass man schließlich ein rechteckiges Feld in der gewünschten Größe erhielt.

Seilspanner war ein sehr wichtiger und angesehener Beruf. Als die Pyramiden gebaut wurden, beaufsichtigten die Pharaonen selbst die Vermessungen. Das Messen von Land begann mit den Seilspannern und entwickelte sich zu einer Wissenschaft, die wir heute **Geometrie** nennen. Das Wort kommt aus dem Griechischen und bedeutet Erdmessung.

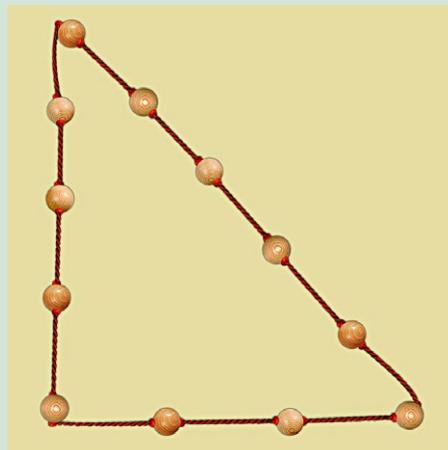
Die Menschen wussten vor 5000 Jahren noch nicht, dass sie mit dem Seil ein rechtwinkliges Dreieck konstruierten. Es begann alles als Teil von Erfahrungen und Entdeckungen von Menschen, die ihr Land nach den jährlichen Überschwemmungen einfach vermessen mussten. Geometrie entwickelte sich aus den praktischen Erfahrungen des Lebens und war ein kreativer Weg des Denkens.



## Das Ägyptische Seil

An einem Seil werden in jeweils gleichem Abstand zwölf Holzperlen mit einem Loch in der Mitte befestigt, sodass zwölf gleich lange Abschnitte (Strecken) entstehen. Die Länge des Seiles ist beliebig (für den Tisch oder für einen Teppich).

Legt man das Seil nun so zu einem Dreieck, dass die eine Seite drei, die nächste vier und die dritte fünf dieser Abschnitte umfasst ( $3 + 4 + 5 = 12$ ), erhält man ein rechtwinkliges Dreieck.



## 1.3 Pythagoras von Samos (570–510 v. Chr.)

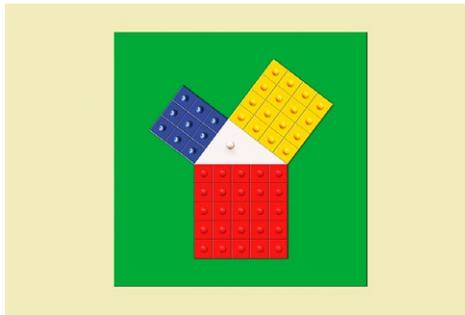
Die Unterteilung des Ägyptischen Seils in drei, vier und fünf regelmäßige Abschnitte entspricht den Erkenntnissen des griechischen Mathematikers Pythagoras von Samos. Die Ägypter kannten sie bereits viele Jahrhunderte vor ihm.

### Der Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras, der für rechtwinklige Dreiecke gilt, lautet: Das Quadrat, das über der längsten Seite errichtet wird, ist so groß wie die beiden Quadrate über den kurzen Seiten zusammen.

*Satz des Pythagoras*

Dieser Satz kann auch mit Montessori-Material dargestellt werden, und mit ihm kann man auch rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen zueinander im Verhältnis 3:4:5 stehen, konstruieren.

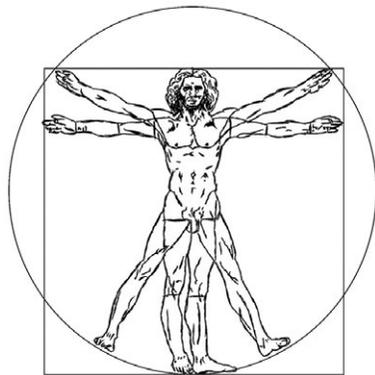
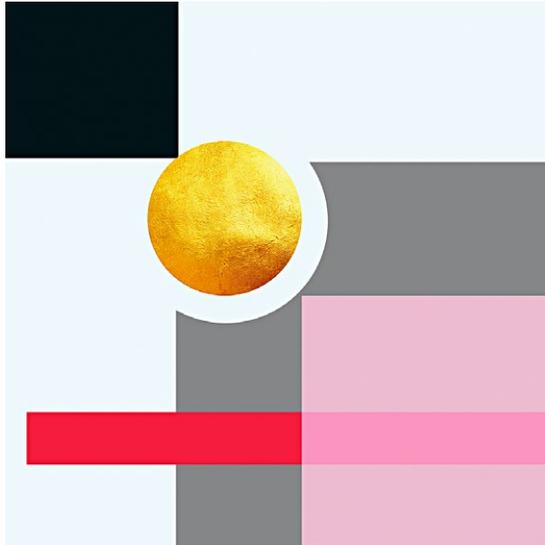
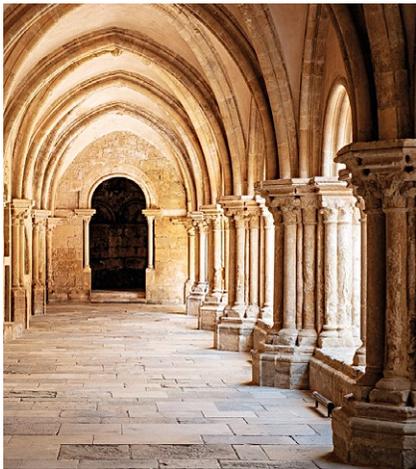
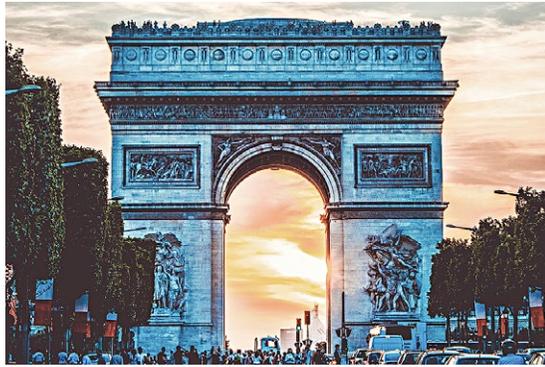


## 1.4 Geometrie und Landschaft, Architektur und Kunst

Wie bereits angedeutet, macht sich der Mensch die Geometrie seit Tausenden von Jahren vor allem in der Landwirtschaft, in der Architektur und in der Kunst zunutze. Auf wie vielfältige Weise das geschehen ist, soll hier an wenigen Beispielen dokumentiert werden.

*Anwendungen*





Der vitruvianische Mensch von Leonardo da Vinci (1452–1519) ist ein weltweit bekanntes Symbol für Symmetrie und Schönheit in den Proportionen des menschlichen Körpers. Die Idee des vitruvianischen Menschen stammt von dem römischen Architekten und Schriftsteller Vitruv, der sie bereits im 1. Jahrhundert v. Chr. schriftlich festgehalten hat. Sie basiert darauf, dass sich der aufrecht stehende Mensch sowohl in die Form eines Quadrats als auch in die eines Kreises einfügen kann.

*Vitruv – Leonardo*

## 1.5 Montessoris Geometriematerial

Nahezu die gesamte durch den Menschen künstlich geschaffene Welt ist von geometrischen Formen geprägt. Daran knüpft auch Maria Montessori mit ihrem Geometriematerial für Kinder an.

Betritt ein Kind einen Raum, so ist es unweigerlich umgeben von vielfältigen (beispielsweise rechteckigen oder quadratischen) Formen, die den Raum gestalten. Oder mit Montessoris Worten gesprochen:

»Die Augen des Kindes werden von geometrischen Figuren angezogen. [...] Die Oberfläche des rechteckigen Tisches, die Sechsecke der Bodenfliesen, die Kreise der Teller, die Quadrate der Servietten, die Ellipsen der Bilderrahmen; alles – Türen, Fenster, Dekorationen – hat eine neue Bedeutung« (Montessori 2012: 17f).

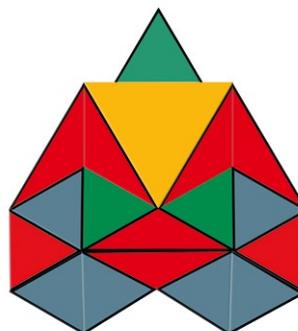
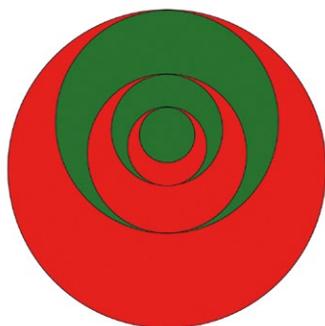
»Schlüssel zur Welt«

Montessori fasst ihr Arbeitsmaterial als ein Instrument auf, das dem Kind einen »Schlüssel zur Welt« in die Hand gibt. Und diese Auffassung erweist sich gerade auch für den Bereich der Geometrie als plausibel und sinnvoll. Das Kind kann durch die Arbeit mit diesem Material bestimmte geometrische Figuren, die der Mensch in der Landwirtschaft, in der Architektur und in der Kunst verwendet, nachvollziehen und auch einige geometrische Lehrsätze beweisen – natürlich zunächst einmal »nur« an einigen ausgewählten Beispielen. Es holt sich gewissermaßen die große Welt auf den Arbeitsteppich.

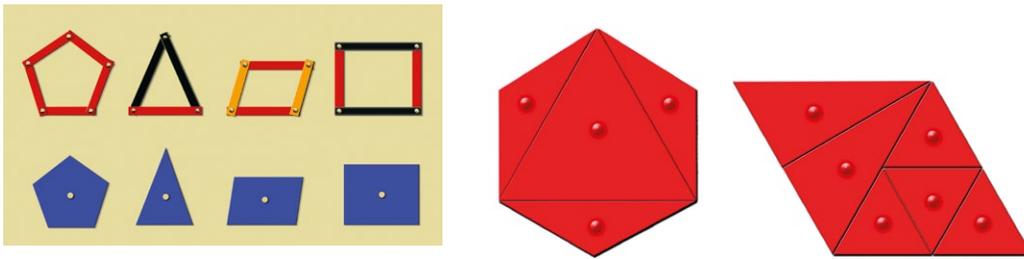
Die Möglichkeiten im Montessori-Material zur Darstellung geometrischer Formen oder von Grundbegriffen sind vielseitig. Sie werden hier nur beispielhaft gezeigt. Von Galileo Galilei wird der folgende Satz überliefert:

»Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.«

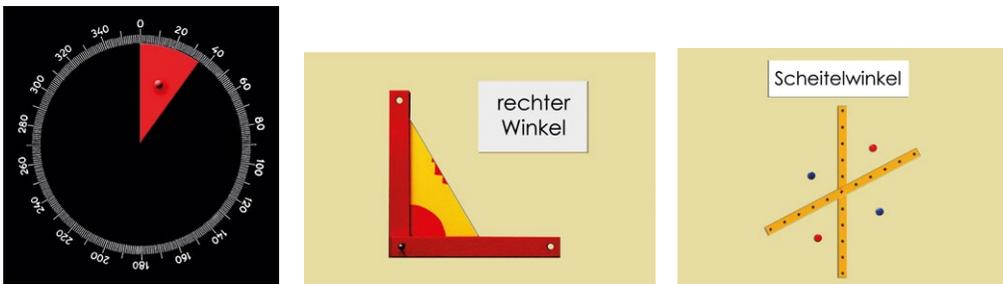
### Geometrische Muster



### Darstellung von Figuren



### Darstellung von Winkeln



### Ein Lot fällen und die Höhe im Dreieck konstruieren



### Den Umfang einer Fläche messen

